TD 6 – TRANSFORMATIONS DE LAPLACE

I –

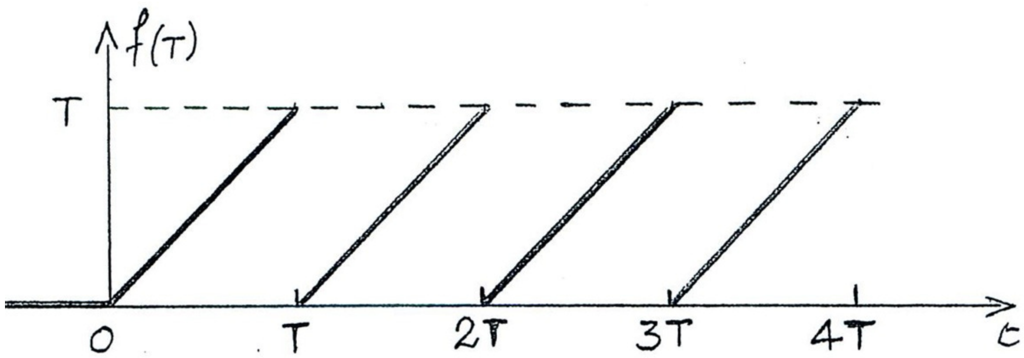
1. Trouver l'original de $F(p) = \dfrac{1}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}$ en utilisant :
   - Le produit de convolution ; indication : calculer *sin(ωt)* et *cos(ωt)* en partant de $f(at) = \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{p}{a}\right)$.
   - Les propriétés de la transformation de Laplace.
2. En utilisant la transformation de Laplace, calculer : $H(t)e^{-at} * H(t)e^{-bt}$ $((a,b>0)$.
3. Déterminer l'original de $F(p) = \dfrac{1}{p\left(1-e^{-p}\right)}$.

II – On considère l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ d'un condensateur : $L\dfrac{d^2q(t)}{dt^2} + \dfrac{q(t)}{C} = E(t)$, (L, C : constantes positives). On suppose qu'à l'instant initial $q(t = 0) = 0$, $dq(t = 0)/dt = 0$, $E(t = 0) = 0$ et qu'à cet instant on applique une force électromotrice définie par : $E(t) = \begin{cases} \dfrac{E_0 t}{T_0} & pour \quad 0 < t < T_0, \\ 0 & t \geq T_0. \end{cases}$.

1. En déduire la transformée de Laplace $q(p)$ de $q(t)$.
2. Décomposer $\dfrac{1}{p^2\left(\tau^2 p^2+1\right)}$ et $\dfrac{1}{p\left(\tau^2 p^2+1\right)}$ en éléments simples.
3. En déduire l'expression de $q(t)$. On explicitera le résultat dans les deux cas : $0 < t < T_0$ et $t \geq T_0$.

III –

1. Calculer la transformée de Laplace d'une fonction périodique $f(t)$ de période T définie par $f(t) = t$ pour $0 \leq t < T$ (fonction en dents de scie).



2. Calculer la transformée de Laplace de la fonction $\varphi_a(t)$ définie par : $\varphi_a(t) = e^{-at}\left[H(t) + H(t-T)e^{aT} + \ldots + H(t-nT)e^{naT} + \ldots\right]$, avec $H(t)$ la fonction de Heaviside et a une constante réelle positive.
3. Résoudre l'équation intégro-différentielle $y' + 3y + 2\int_0^t y\,dt = f(t)$ avec la condition initiale $y(0) = 1$, $f(t)$ étant la fonction en dents de scie du 1 avec $T = 1$.

IV – Résoudre à l'aide la transformation de Laplace, l'équation intégrale : $\int_0^t \frac{y(u)}{\sqrt{t-u}}\,du = 1 + t + t^2$. On donne $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \supset \frac{1}{\sqrt{p}}$.